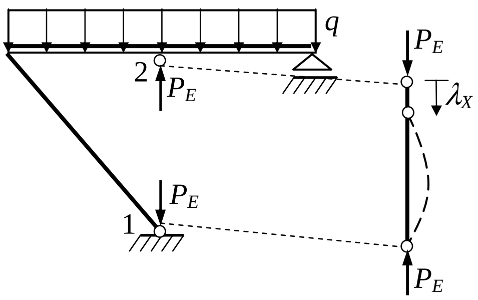
Przyjmujemy następujący układ podstawowy.



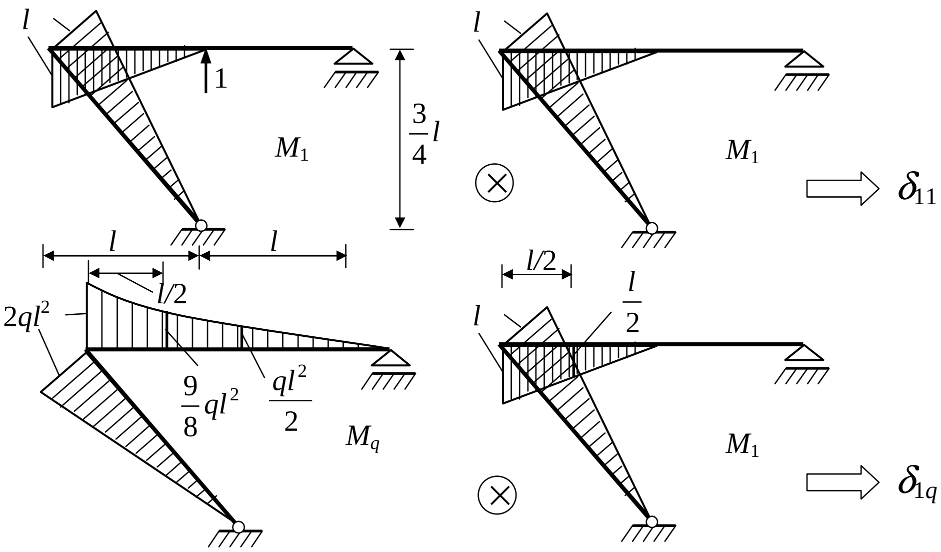
Rys. 4.5b

Równanie metody sił przyjmie postać $\delta_{11}P_E + \delta_{1q} = \lambda_X$.

W równaniu tym uwzględniamy nie tylko stany giętne w układzie, ale i skrócenie wywołane ściskaniem w pręcie 1-2. Wskutek działania siły krytycznej P_E, która w analizowanym zadaniu jest siłą hiperstatyczną, pręt 1-2 ulegnie skróceniu o λ_X

$$\lambda_X = -\frac{P_E \cdot \frac{3}{4} l}{EF}$$

Wartości δ_{11} i δ_{1q} wyznaczamy korzystając z graficznego sposobu przemnożenia wykresów.



Rys. 4.5c

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1 M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} l \cdot \frac{5}{4} l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l\right] = \frac{3}{4}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{1q} = \int_s \frac{M_q M_1}{EJ} ds =$$

$$= -\frac{1}{EJ}\left[\frac{l}{6}\left(2ql^2 \cdot l + 4 \cdot \frac{9}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{2} + 0\right) + \frac{1}{2} \cdot 2ql^2 \cdot \frac{5}{4} l \cdot \frac{2}{3} l\right] = -\frac{37}{24}\frac{ql^4}{EJ}$$

uzyskamy

$$\frac{3}{4}\frac{l^3}{EJ} P_E - \frac{37}{24}\frac{ql^4}{EJ} = -\frac{3P_E l}{4EF}$$

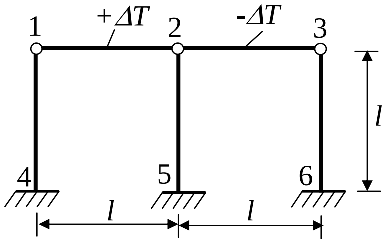
Uwzględniając wartość siły krytycznej $P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{3}{4} l\right)^2}$ obliczamy poszukiwaną wielkość obciążenia krytycznego

$$q = q_{kr} = \frac{32}{37}\frac{\pi^2 EJ}{l^5}\left(i^2 + l^2\right)$$

A zatem, aby pręt 1-2 uległ wyboczeniu obciążenie musi przyjąć co najmniej wartość q_{kr}.

ZADANIE 4.6.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym należy wyznaczyć wartość temperatury krytycznej ΔT, która spowoduje wyboczenie prętów w układzie.



Rys. 4.6a

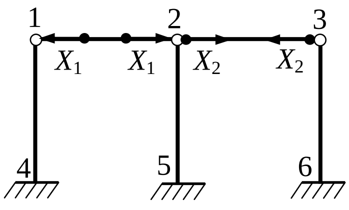
Dane: J, E, F, l, α_T

Szukane: $\Delta T=\Delta T_{kr}=?$

Rozwiązanie:

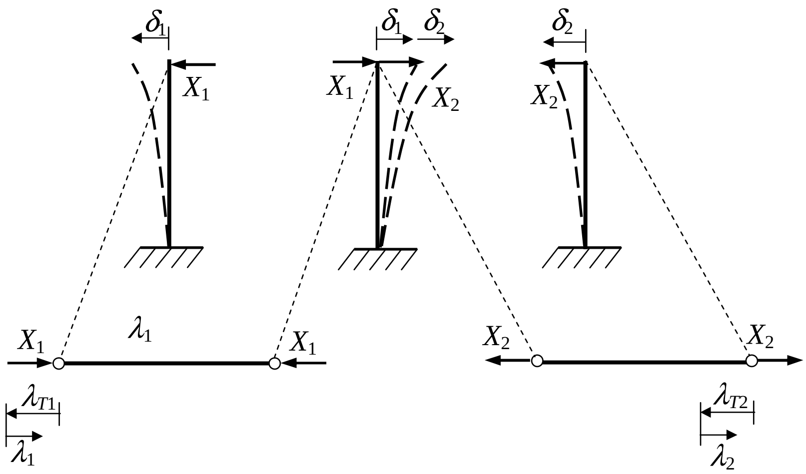
Analizowany układ prętowy jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalny. W układzie tym wyboczy się pręt poziomy 1-2 w którym działa siła hiperstatyczna X_1. Warunek utraty stateczności można tu sformułować następująco: $X_1 \geq P_E$, gdzie X_1 jest siłą osiową wywołaną działaniem temperatury w pręcie 1-2, zaś P_E jest eulerowską siłą krytyczną $P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$ gdzie $l_w = l$.

Aby wyliczyć wartość krytyczną przyrostu temperatury należy znaleźć najpierw hiperstatyczne siły X_1 i X_2 działające odpowiednio w prętach 1-2 i 2-3.



Rys. 4.6b

Sposób postępowania polega tutaj na analizie stanu przemieszczeń końców prętów 1-4, 2-5, 3-6. Wypisując warunek zgodności przemieszczeń dwóch podukładów prętowych tzn. 4-1 – 2-5 i 5-2 – 3-6 otrzymamy układ dwóch równań z których wyliczymy siły hiperstatyczne X_1, X_2.



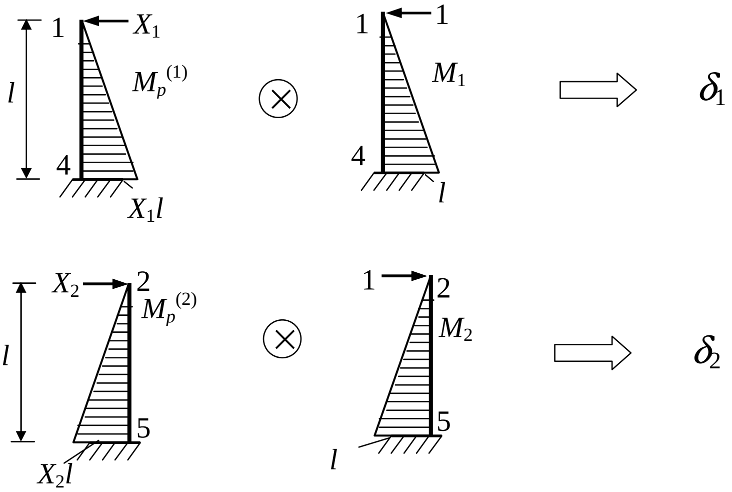
Rys. 4.6c

Warunki nierozdzielności dla tych dwóch podukładów zgodnie z rysunkiem można wypisać w sposób następujący

$$\begin{cases} \delta_1 + (\delta_1 + \delta_2) = \lambda_{T1} - \lambda_1 \\ -(\delta_1 + \delta_2) - \delta_2 = -\lambda_{T2} + \lambda_2 \end{cases}$$

gdzie δ_1 jest przemieszczeniem poziomym pręta 1-4 i 2-5 w kierunku działania siły X_1, δ_2 jest przemieszczeniem poziomym pręta 3-6 i 2-5 od działania siły X_2, λ_{T1} jest wydłużeniem pręta 1-2 pod wpływem podgrzania o ΔT, λ_{2T} jest skróceniem pręta 2-3 pod wpływem jego oziębienia o ΔT, λ_1 to skrócenie pręta 1-2 pod wpływem hiperstatycznej siły X_1, zaś λ_2 to wydłużenie pręta 2-3 pod wpływem X_2.

Wielkości δ_1 i δ_2 otrzymamy z przemnożenia następujących wykresów



Rys. 4.6d

$$\begin{cases} \delta_1 = \int\limits_s \dfrac{M_1 M_p^{(1)}}{EJ} ds = \dfrac{1}{EJ}\left[\dfrac{1}{2} X_1 l \cdot l \cdot \dfrac{2}{3} l\right] = \dfrac{X_1 l^3}{3EJ} \\ \delta_2 = \int\limits_s \dfrac{M_2 M_p^{(2)}}{EJ} ds = \dfrac{1}{EJ}\left[\dfrac{1}{2} X_2 l \cdot l \cdot \dfrac{2}{3} l\right] = \dfrac{X_2 l^3}{3EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{X_1 l}{EF} \\ \lambda_2 = \dfrac{X_2 l}{EF} \\ \lambda_{T1} = \alpha_T \varDelta T l \\ \lambda_{T2} = \alpha_T \varDelta T l \end{cases}$$

Wielkości λ_{T1} i λ_{T2} są to wartości bezwzględne wydłużenia.
Uzyskujemy

$$\left(\frac{2l^2}{3EJ} + \frac{1}{EF}\right) X_1 + \frac{l^2}{3EJ} X_2 = \alpha_T \varDelta T$$

$$\frac{l^2}{3EJ} X_1 + \left(\frac{2l^2}{3EJ} + \frac{1}{EF}\right) X_2 = \alpha_T \varDelta T$$

Rozwiązaniem tego układu są wielkości X_1 i X_2

$$\left(\frac{2l^2}{3EJ} + \frac{1}{EF}\right)(X_1 - X_2) + \frac{l^2}{3EJ}(X_2 - X_1) = 0 \text{ stąd} \qquad X_1 = X_2$$

$$X_1 = \frac{\alpha_T \varDelta T E J}{l^2 + i^2} \quad , \quad i^2 = \frac{J}{F}$$

Zgodnie z uwagą podaną na początku toku rozwiązania oraz z wyrażeniem na siłę Eulera

$$X_1 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

otrzymujemy równanie

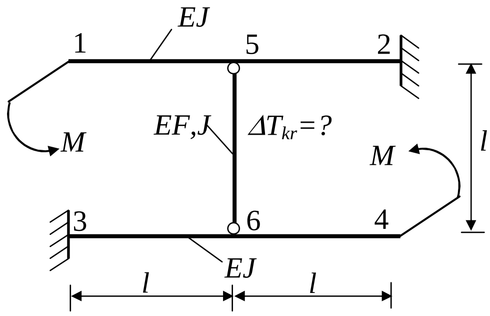
$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\alpha_T \varDelta T E J}{l^2 + i^2}$$

z którego wyliczamy wartość krytyczną przyrostu temperatury $\varDelta T$

$$\varDelta T = \varDelta T_{kr} = \frac{\pi^2}{\alpha_T}\left(1 + \left(\frac{i}{l}\right)^2\right), \quad \varDelta T_{kr} = \frac{\pi^2}{\alpha_T}\left(1 + s^2\right), \quad s = \frac{i}{l}$$

ZADANIE 4.7.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.7a należy określić wartość przyrostu temperatury ΔT_{kr} w pręcie pionowym 5-6, która prowadzi do wyboczenia tego pręta. Należy również przeanalizować łączne działanie M i ΔT na utratę stateczności pręta 5-6.



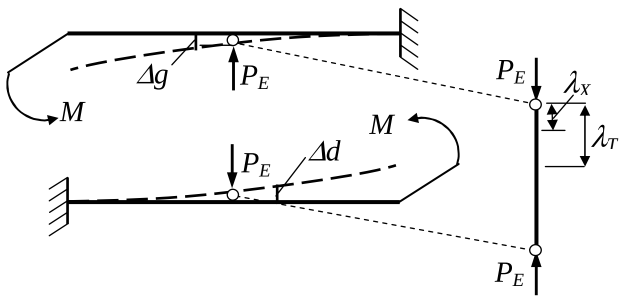
Rys. 4.7a

Dane: l, M, EJ, EF Szukane: $\Delta T_{kr}=?$

Rozwiązanie:

W przedstawionym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 5-6. Warunek utraty stateczności wyniknie z analizy stanu względnych przemieszczeń końców pręta 5-6.

Wymagać będziemy, aby wydłużenie pręta od temperatury $\lambda_T = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$ i skrócenie od siły krytycznej $\lambda_X = \dfrac{Xl}{EF}$, gdzie $X = \dfrac{\pi^2 EJ}{l_w^2} = P_E$ było równe sumie ugięć prętów poziomych 1-2 i 3-4. Ugięcia tych prętów wynikają z działania momentów przyłożonych do układu. Przytoczony sposób postępowania przedstawia następujący schemat



Rys. 4.7b

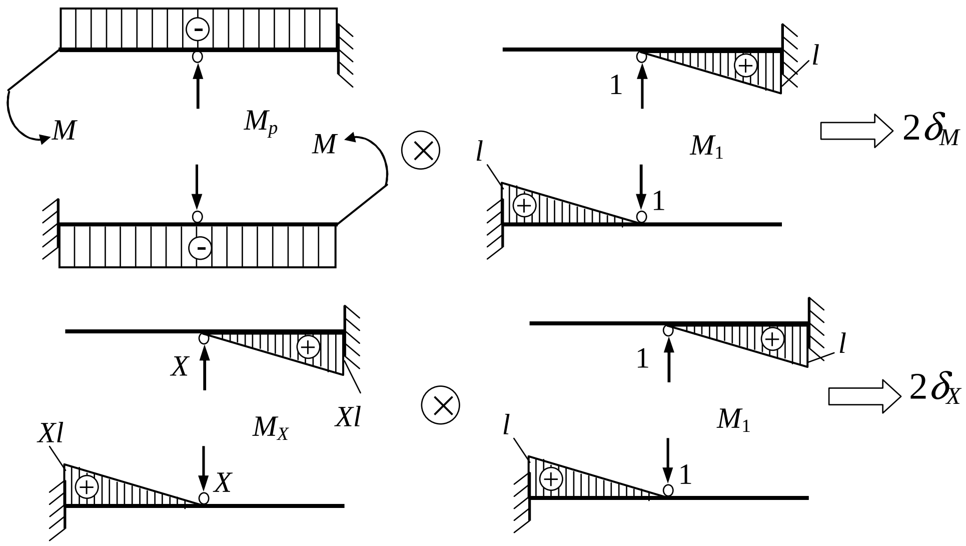
Warunek nierozdzielności przemieszczeń tego układu jest następujący

$$\Delta g + \Delta d = \lambda_T - \lambda_X$$

gdzie Δg oznacza przemieszczenie górnego poziomego podukładu 1-2 wywołane działaniem momentów M i siły P_E, a Δd to przemieszczenie dolnego poziomego podukładu 3-4 wywołane również działaniem momentu i siły krytycznej czyli

$$\left.\begin{aligned} \Delta g &= \delta_M + \delta_X \\ \Delta d &= \delta_M + \delta_X \end{aligned}\right\} \Delta g + \Delta d = 2\delta_M + 2\delta_X$$

Wartości $2\delta_M$ i $2\delta_X$ wynikają z „przemnożenia” wykresów według relacji



Rys. 4.7c

$$2\delta_M = \int_s \frac{M_p M_1}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ}\left(M \cdot l \cdot \frac{1}{2} l\right) = -\frac{Ml^2}{2EJ}$$

$$2\delta_X = \int_s \frac{M_X M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} l \cdot Xl \cdot \frac{2}{3} l\right) = \frac{Xl^3}{3EJ}$$

Ostatecznie otrzymujemy wartość sumy ugięć prętów poziomych

$$2\delta_M + 2\delta_X = \frac{2Xl^3 - 3Ml^2}{6EJ}$$

Po podstawieniu uzyskanych wyników do warunku nierozdzielności otrzymamy

$$\frac{Xl^3}{3EJ} - \frac{Ml^2}{2EJ} = \alpha_T \Delta T \cdot l - \frac{Xl}{EF}$$

gdzie $X = P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l_w^2}$.

Poszukiwana wartość temperatury krytycznej powodującej wyboczenie wynosi

$$\Delta T_{kr} = \frac{\pi^2}{3\alpha_T} - \frac{Ml}{2\alpha_T EJ} + \frac{\pi^2 J}{l^2 F \alpha_T}$$

Z warunku nierozdzielności dla ustalonej temperatury można wyznaczyć krytyczną wartość momentu *M*

$$M_{kr} = \frac{2EJ}{l^2}\left[P_E\left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{EF}\right) - \alpha_T \Delta Tl\right] = \frac{2EJ}{l}\left(\frac{\pi^2}{3} + \pi^2\left(\frac{i}{l}\right)^2 - \alpha\Delta T\right)$$

Analizować będziemy teraz ogólny przypadek utraty stateczności w wyniku równoczesnego przyrostu temperatury i momentu *M*.

Z warunku nierozdzielności otrzymamy wówczas

$$X\left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{EF}\right) = \frac{Ml^2}{2EJ} + \alpha_T \Delta Tl$$

stąd dla $X = P_E$

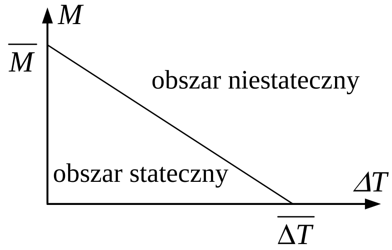
$$P_E = \left(\frac{Ml^2}{2EJ} + \alpha_T \Delta Tl\right)\frac{1}{K} \quad \rightarrow \quad \frac{Ml^2}{2EJKP_E} + \frac{\alpha_T \Delta Tl}{KP_E} = 1$$

gdzie $K = \dfrac{l^3}{3EJ} + \dfrac{l}{EF}$

Wprowadzając zmienne $\overline{M} = \frac{2EJ}{l^2} KP_E$ i $\Delta\overline{T} = \frac{1}{\alpha_T l} KP_E$ otrzymamy równanie

$$\frac{M}{\overline{M}} + \frac{\Delta T}{\overline{\Delta T}} = 1$$

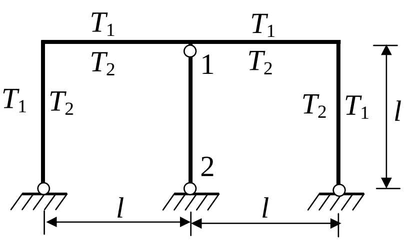
pozwalające na wyznaczenie krytycznych wartości M i ΔT w układzie. Graficznie równanie to przedstawia prostą interakcji w układzie osi M i ΔT



Rys. 4.7d

ZADANIE 4.8.

W podanym układzie prętowym statycznie niewyznaczalnym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.8a należy określić wartość temperatury krytycznej ΔT_{kr}.



Rys. 4.8a

Dane: l, EJ, EF, h

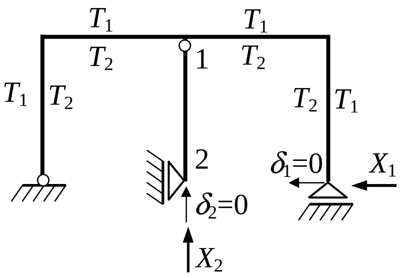
Szukane: ΔT_{kr}=?, $T_1 - T_2 = \Delta T_{kr}$

Rozwiązanie:

Zadanie jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalne.

Rozwiązanie przedstawionego problemu polega na wyznaczeniu wartości sił hiperstatycznych i ustaleniu warunku utraty stateczności. W tym przypadku wyboczeniu ulegnie pręt 1-2. Siła osiowa w tym pręcie zależy parametrycznie od sił hiperstatycznych i różnicy temperatur. Znalezienie temperatury krytycznej ΔT_{kr} polega na przyrównaniu wyżej wymienionej siły osiowej istniejącej w pręcie wyboczonym 1-2 z eulerowską siłą krytyczną $P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{(l_w)^2}$.

W tym celu należy zamienić układ statycznie niewyznaczalny na układ podstawowy (wyznaczalny)



Rys. 4.8b

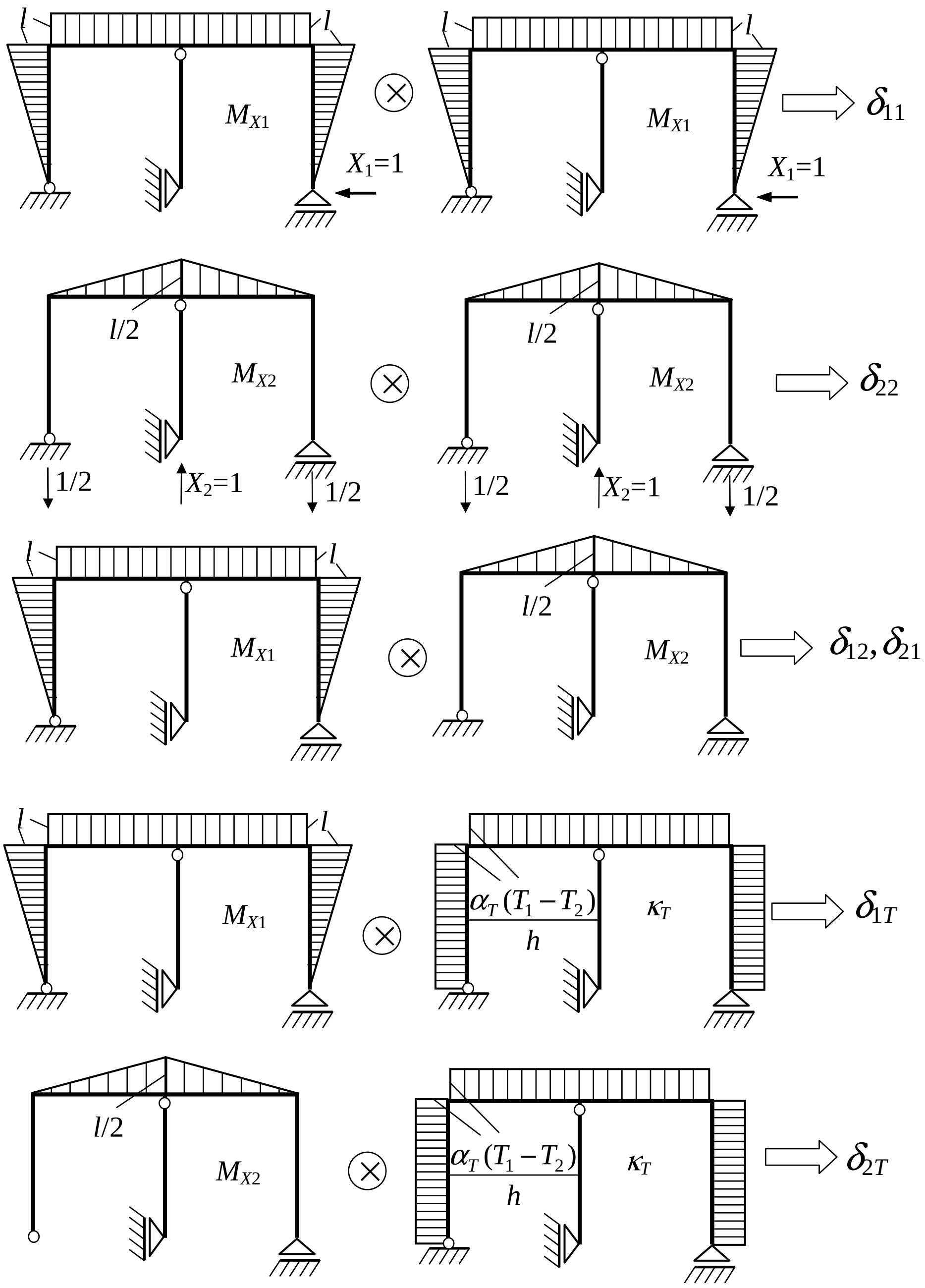
Wprowadzone siły hiperstatyczne X_1 i X_2 wyznaczymy budując układ równań metody sił wykorzystujący warunki narzucone na przemieszczenia w zmodyfikowanych podporach układu pierwotnego

$\delta_1 = 0$ i $\delta_2 = 0$

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1T} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2T} = 0 \end{cases}$$

Wartości δ_{11}, δ_{12}, δ_{22}, δ_{1T}, δ_{2T}, wyznaczymy stosując „przemnożenia” wykresów wg sposobu Mohra



Rys. 4.8c

Ponieważ wykresy M_{X1} i κ_T podobnie jak M_{x2} i κ_T leżą po tej samej stronie układu, to w wyniku „przemnożenia” δ_{1T} i δ_{2T} będą mieć znak „+”.

Wartości przemieszczeń wynoszą kolejno

$$
\begin{aligned}
\delta_{11} &= \int_s \frac{M_1 M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{1}{2} l\cdot l\cdot\frac{2}{3} l + l\cdot 2l\cdot l\right) = \frac{8l^3}{3EJ} \\
\delta_{12} &= \int_s \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} l\cdot\frac{1}{2} l\cdot l + \frac{1}{2} l\cdot\frac{1}{2} l\cdot l\right) = \frac{l^3}{2EJ} \\
\delta_{22} &= \int_s \frac{M_2 M_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{1}{2} l\cdot\frac{1}{2} l\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{2} l\right) = \frac{1}{6}\frac{l^3}{EJ} \qquad (3) \\
\delta_{1T} &= \int_s \kappa_T M_1 ds = 2l\frac{T_1 - T_2}{h}\alpha_T l + 2\cdot\frac{1}{2} l\cdot l\frac{T_1 - T_2}{h}\alpha_T = \frac{3(T_1 - T_2)}{h}\alpha_T l^2 \\
\delta_{2T} &= \int_s \kappa_T M_2 ds = 2l\frac{T_1 - T_2}{h}\alpha_T \frac{1}{2}\frac{1}{2} l = \frac{(T_1 - T_2)}{2h}\alpha_T l^2
\end{aligned}
$$

Podstawiając uzyskane wartości do zależności otrzymujemy następujący układ równań

$$
\begin{cases}
\dfrac{8l^3}{3EJ} x_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{l^3}{EJ} x_2 = -\dfrac{3(T_1 - T_2)}{h}\alpha_T l^2 \\
\dfrac{l^3}{2EJ} x_1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{l^3}{EJ} x_2 = -\dfrac{(T_1 - T_2)}{2h}\alpha_T l^2
\end{cases}
$$

Z układu równań wyliczymy wielkości sił hiperstatycznych

$$
X_1 = \frac{W_1}{W} \qquad X_2 = \frac{W_2}{W}
$$

gdzie

$$
W = \begin{vmatrix} \dfrac{8l^3}{3EJ} & \dfrac{l^3}{2EJ} \\ \dfrac{l^3}{2EJ} & \dfrac{l^3}{6EJ} \end{vmatrix} = \frac{8l^6}{18E^2J^2} - \frac{l^6}{4E^2J^2} = \frac{7l^6}{36E^2J^2}
$$

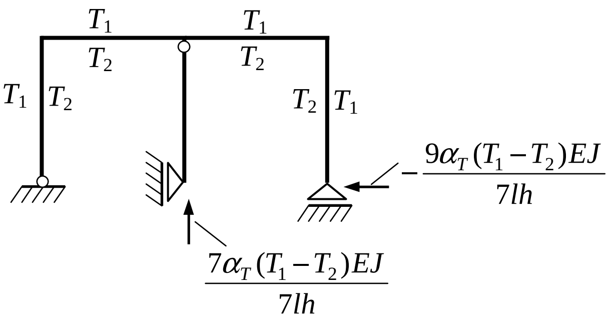
$$W_1=\begin{vmatrix}\frac{-3(T_1-T_2)}{h}\alpha_T l^2 & \frac{1l^3}{2EJ}\\ \frac{-(T_1-T_2)}{2h}\alpha_T l^2 & \frac{1l^3}{6EJ}\end{vmatrix}=\frac{-3(T_1-T_2)l^5\alpha_T}{6EJh}+\frac{1}{4}\frac{(T_1-T_2)l^5\alpha_T}{EJh}=$$
$$=-\frac{1}{4}\frac{(T_1-T_2)l^5\alpha_T}{EJh}$$

$$W_2=\begin{vmatrix}\frac{8l^3}{3EJ} & \frac{-3(T_1-T_2)\alpha_T l^2}{h}\\ \frac{l^3}{2EJ} & \frac{-(T_1-T_2)\alpha_T l^2}{2h}\end{vmatrix}=\frac{-8(T_1-T_2)\alpha_T l^5}{6EJh}+\frac{3(T_1-T_2)l^5\alpha_T}{2EJh}=$$
$$=\frac{(T_1-T_2)\alpha_T l^5}{6EJh}$$

Ostatecznie siły X_1 i X_2 wynoszą

$$X_1=-\frac{9(T_1-T_2)\alpha_T EJ}{7lh}$$
$$X_2=\frac{6(T_1-T_2)\alpha_T EJ}{7lh}$$

W układzie występują więc następujące siły



Rys. 4.8d

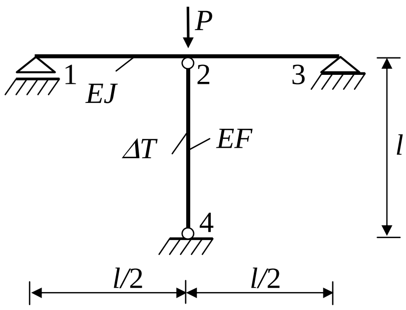
Wartość ΔT_{kr} uzyskujemy z przyrównania wartości siły hiperstatycznej X_2, która jest parametrycznie związana z poszukiwaną temperaturą krytyczną, do eulerowskiej siły krytycznej

$$\frac{6(T_1 - T_2)\alpha_T EJ}{7lh} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$\Delta T_{kr} = \frac{7\pi^2 h}{6l\alpha_T}$$

ZADANIE 4.9.

W podanym układzie prętowym, którego schemat przedstawiono na rys. 4.9a, należy określić wartość temperatury krytycznej ΔT_{kr}, a następnie przeanalizować ogólny przypadek utraty stateczności przy jednoczesnym wzroście temperatury T oraz obciążenia pionowego P.



Rys. 4.9a

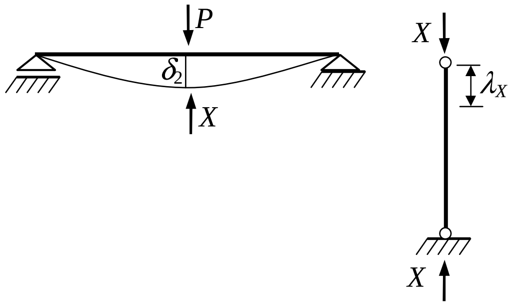
Dane: l, EJ, EF
Szukane: T_{kr}=?

Rozwiązanie:
W podanym zadaniu wyboczeniu ulegnie pręt pionowy 2-4. Warunek nierozdzielności przemieszczeń ma postać następującą

$$\delta_2 = \delta_p - \delta_X = \lambda_X - \lambda_T$$

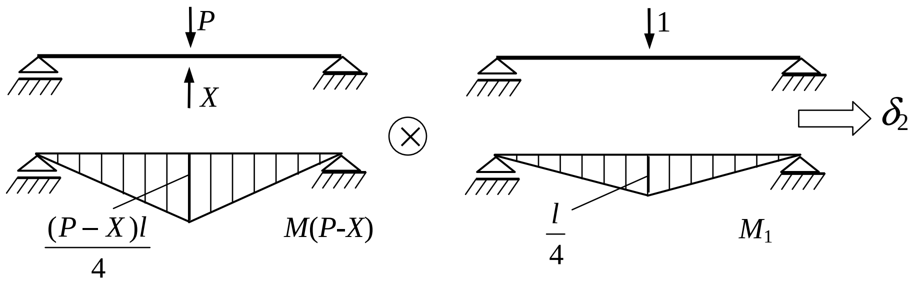
gdzie λ_T – wydłużenie pręta wywołane przyrostem temperatury, λ_X – skrócenie pręta wywołane siłą krytyczną $X=P_E$.

Przedstawiony warunek obrazuje schemat przemieszczeń



Rys. 4.9b

Wartość δ_2 otrzymamy z „przemnożenia” wykresów



Rys. 4.9c

$$\delta_2 = 2\left[\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{(P-X)l}{4}\frac{1}{6}\right] = \frac{(P-X)l^3}{48}\frac{1}{EJ}$$

$$\lambda_X = \frac{Xl}{EF} \ \text{ i } \ X = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$\lambda_T = \alpha_T \Delta T \cdot l$$

Podstawiając δ_2, λ_X i λ_T do warunku nierozdzielności uzyskamy

$$\frac{(P-X)}{48}\frac{l^3}{EJ} = -\,\alpha_T \Delta T l + \frac{Xl}{EF}$$

$$\alpha_T \Delta T l = \frac{(X-P)l^3}{48EJ} + \frac{Xl}{EF}$$

$$\Delta T_{kr} = \frac{1}{\alpha_T l}\left(\frac{(X-P)l^3}{48EJ} + \frac{Xl}{EF}\right)$$

gdzie $X = P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$

$$\Delta T_{kr} = \frac{P_E}{\alpha_T l}\left(\left(1 - \frac{P}{P_E}\right)\frac{l^3}{48EJ} + \frac{l}{EF}\right)$$

Z warunku nierozdzielności przemieszczeń można również określić kryterium utraty stateczności przy równoczesnym wzroście obciążenia P i temperatury. Zachodzi

$$X = P_E \Rightarrow P_E = \left(\frac{Pl^3}{48EJ} + \alpha_T \Delta Tl\right)\frac{1}{K}, \quad K = \frac{l^3}{48EJ} + \frac{l}{EF}$$

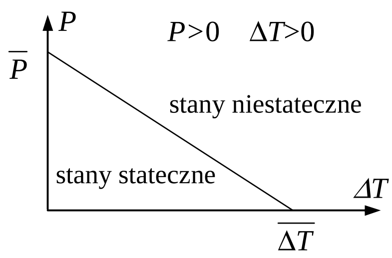
stąd otrzymujemy bezwymiarową zależność

$$\frac{Pl^3}{P_E K\, 48EJ} + \frac{\alpha_T \Delta Tl}{P_E K} = 1$$

Wprowadzając oznaczenia $\overline{P} = P_E K \dfrac{48EJ}{l^3}$ i $\Delta\overline{T} = P_E K \dfrac{1}{\alpha_T l}$ uzyskamy poszukiwany warunek utraty stateczności w przypadku niezależnego wzrostu obciążenia P i przyrostu temperatury ΔT

$$\frac{P}{\overline{P}} + \frac{\Delta T}{\Delta\overline{T}} = 1$$

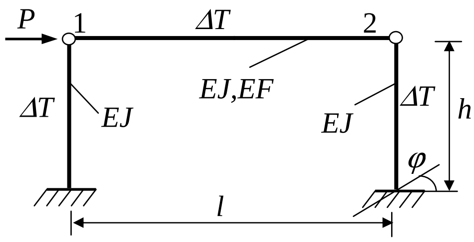
Zależność ta przedstawia prostą na płaszczyźnie o osiach P i ΔT rozdzielającą stany stateczne od niestatecznych



Rys. 4.9d

ZADANIE 4.10.

Należy określić warunki utraty stateczności pręta poziomego 1-2 w ramie przedstawionej na rys. 4.10a wraz z wpływami zewnętrznymi, którymi są obciążenie poziome P przyłożone w narożu 1, równomierny we wszystkich przekrojach przyrost temperatury ΔT oraz obrót podpory o kąt φ. Każdy z tych wpływów z osobna prowadzi do utraty stateczności. Należy przeanalizować wpływ łącznego wieloparametrowego narastania P, ΔT i φ prowadzącego do utraty stateczności.



Rys. 4.10a

Dane: $P, l, h, EJ, F, \Delta T, \varphi,\ P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{l^2}$

Szukane: $\Delta T_{kr},\ \varphi_{kr},\ P_{kr}$

Rozwiązanie:

Analizować będziemy łączny wpływ wszystkich trzech czynników na utratę stateczności pręta 1-2. Rozdzielając układ na dwa podukłady: ściskany pręt 1-2 oraz pozostałą część układu oraz wypisując warunki nierozdzielności przemieszczeń obu podukładów otrzymamy

$$\delta_1 + \delta_2 + \Delta - \varphi h = \alpha_T \Delta T l$$

Warunek ten oznacza iż suma przemieszczeń poziomych wsporników $\delta_1+\delta_2$ powiększona o skrócenie Δ wynikające z działania siły osiowej $N_{1\text{-}2}=P_E$, pomniejszona o przemieszczenie naroża 2 z powodu obrotu φ musi być równa wydłużeniu wynikającemu z przyrostu temperatury.